函数图像存在各种有趣的分形，无论是在理论上还是在实践上都很重要。确实，作为时间的函数绘制的许多实际现象都显示了分形特征。例如，包括股市价格，风速，水库水位和人口数据等财务数据，尤其是在相当长的时间跨度内记录的数据。

11.1 函数图像 2020年7月10日10点03分

在某些情况下,函数的图像,

被视为坐标平面的子集的分形.(为了与本书的其余部分保持一致,我们使用坐标而不是,并且因为自变量经常是时间.)如果是Lipschitz函数或具有连续导数,则图像的维数为1.也就是说,如果对于所有解剖都以为界.但是,连续函数可能会非常不规则,以使维数严格大于1.也许最著名的例子是

其中和.此函数本质上是Weierstrass的连续函数示例,该函数无处可微,具有盒维度s,并且据信具有Hausdorff尺寸s.

我们首先得出一些简单但广泛适用的盒维度估计.给定一个函数f和一个区间.我们用表示一个区间内f的最大范围,

命题11.1 令是连续的.令0 <𝛿 <1,并且m是大于或等于的最小整数.则,如果是与图像相交的𝛿网格的方块数目,

即使不连续,右侧不等式仍然成立.

推论11.2 令是一个连续函数.

1. 假设

其中和.则,且.如果,对于某些(11.2)成立,则上述情况仍然成立.

1. 假设存在数值,并具有以下性质:对于每个以及,存在使得以及

则,.

例题11.3 Weierstrass函数

对于定值和.通过下列函数定义

则,假设𝜆足够大,.

在第9.4节中,我们看到了由迭代函数系统定义的自仿射集通常是分形的.通过适当选择仿射变换,它们也可以是函数图像.令是关于坐标的矩阵表示形式的仿射变换

即,

因此,对于每个,将垂直线转换为垂直线,并将垂直带映射到带上.我们认为

对于每个，方向的收缩比方向的收缩要强.

设和是和的不动点.我们假设矩阵元素使得

这样,线段汇合形成一条多边形曲线.为了避免出现小问题,我们还假定点S1不共线.迭代函数系统的吸引子F(见(9.4)),可以通过用“生成器” 的仿射图像重复替换线段来构造;参见图11.3和11.4.条件（11.10）确保了这些段的连接,结果是F是某个连续函数f：[0，1]→the的图。 注意，这些条件不一定意味着Si相对于欧几里得距离是收缩的。 但是，可以重新定义（x，t）平面中的距离，以使Si收缩，在这种情况下，IFS理论可保证唯一的吸引子。